Déterminant circulant et suite de polygones :

I Le développement

Le but de ce développement est d'étudier la convergence d'une suite de polygone à l'aide d'un calcul préliminaire de déterminant.

Dans tout ce développement, on considère une matrice circulante, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

où $a_0, a_2, ..., a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

Proposition 1 : [Gourdon, p.153]

Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Preuve :

On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

$*$ Diagonalisons J :

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} JX = \lambda X &\implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \\ &\implies \forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \lambda^n x_i \\ &\implies \lambda \in \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) \subseteq \mathbb{U}_n$.

Réciproquement, pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, en posant $e_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$ (non nul) on a $Je_k = \omega^k e_k$. Ainsi, e_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \mathbb{U}_n$.

Ainsi, J possède n valeur propres distinctes et donc J est diagonalisable et il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$ (avec $D = \mathrm{diag}\left(1, \omega, ..., \omega^{n-1}\right)$).

$*$ Déterminant de C :

On a :

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1}$$

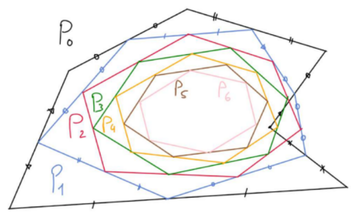
Donc :

$$\det(C) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) = \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ik} = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$$

■

Proposition 2 : [Caldero, p.45]
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a+b=1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

Preuve :
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a+b=1$.
On définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$.



$*$ Relation de récurrence :

Pour $k \in \mathbb{N}$, on représente le polygone P_k par le vecteur $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

On a alors la relation :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = \begin{pmatrix} z_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ z_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1^{(k)} + bz_2^{(k)} \\ \vdots \\ az_n^{(k)} + bz_1^{(k)} \end{pmatrix} = C_{a,b}Z_k, \text{ où } C_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ b & & & a \end{pmatrix}$$

On a alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = C_{a,b}^k Z_0$.

$*$ Convergence de $\left(C_{a,b}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$:
On a :

$$\chi_{C_{a,b}} = \begin{vmatrix} X-a & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -b \\ -b & 0 & \cdots & 0 & X-a \end{vmatrix}$$

Par la proposition précédente on a alors :

$$\chi_{C_{a,b}} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \underbrace{\left(a + b\omega^j\right)}_{=\lambda_j} \right)$$

La matrice $C_{a,b}$ est donc diagonalisable (car $\chi_{C_{a,b}}$ scindé à racines simples) et il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $C_{a,b} = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$. Or, pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$, on a :

$$|\lambda_j|^2 = \left|a + b\omega^j\right|^2 = \left(a + b\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^2 + b^2\sin^2\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$$
$$= (a+b)^2 - 2ab + 2ab\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = 1 - \underbrace{2ab}_{>0}\underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)}_{>0} < 1$$

On a donc $\lambda_0 = a+b = 1$ et pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$, $|\lambda_j|^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice $D^\infty = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$ et par continuité du produit, on a $C_{a,b}^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} PD^\infty P^{-1}$.

Ainsi, la suite $\left(Z_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $Z \in \mathbb{C}^n$ et on a également $Z = C_{a,b}Z$, donc $Z \in \mathrm{Ker}(C_{a,b} - I_n) = E_1\left(C_{a,b}\right)$.

Or, $C_{a,b}$ possède n valeurs propres distinctes et donc $E_1\left(C_{a,b}\right)$ est de dimension 1 et puisque $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1\left(C_{a,b}\right)$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Z = \alpha e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$.
Finalement, la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le point d'affixe α.

$*$ Convergence vers l'isobarycentre :
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note G_k l'isobarycentre de P_k.
On a alors (modulo n) :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n az_i^{(k)} + bz_{i+1}^{(k)} = (a+b)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^{(k)} = G_k$$

Donc la suite $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et donc converge vers $G_0 \in \mathbb{C}$. Enfin, par continuité du passage à l'isobarycentre, on a $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α.

Finalement, la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

$\blacksquare$

II Remarques sur le développement

II.1 Une autre manière de calculer un déterminant circulant...

On considère la matrice $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ (matrice de Vandermonde-Fourier).
Commençons par déterminer $\det(C\Omega)$:
Le coefficient d'indice (i,j) de la matrice $C\Omega$ est $\omega^{(i-1)(j-1)}P(\omega^{j-1})$, autrement dit :

$$C\Omega = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \cdots & \omega^{n-1}P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1}P(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

On a donc par n-linéarité du déterminant :

$$\det(C\Omega) = P(1)P(\omega)...P(\omega^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} P\left(\omega^i\right)\det(\Omega)$$

De plus, $\det(\Omega) \neq 0$ puisqu'il s'agit d'un déterminant de Vandermonde dont les paramètres sont deux à deux distincts. Ainsi, on a (par multiplicativité du déterminant) $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

II.2 Pour aller plus loin...

II.2.1 Quelques remarques

On peut également montrer que si l'on considère les barycentres de trois points ou plus alors cela ne change rien au problème. De même, si les coefficients des barycentres évoluent au cours du temps alors cela ne change pas énormément de choses au problème (si la série $\sum a_k b_k$ diverge alors on a convergence vers l'isobarycentre).

On a également utilisé dans ce développement le fait qu'une limite d'une suite géométrique de matrices est un projecteur : ce résultat est vrai en général. On peut également montrer qu'une suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice nulle si, et seulement si, $\rho(A) < 1$ (utiliser la décomposition de Dunford pour le sens direct et un vecteur propre pour la réciproque).

II.2.2 L'ensemble des matrices circulantes

On a montré dans le développement que toute matrice circulante est un polynôme en J. Réciproquement, puisque $J^n = I_n$, tout polynôme en J est une matrice circulante. Ainsi la somme et le produit de matrices circulantes sont circulantes, et un tel produit est commutatif. L'ensemble des matrices circulantes n'est alors rien d'autre que l'algèbre commutative des polynômes en J.

II.2.3 Réduction des matrices circulantes

On a montré dans le développement que J était diagonalisable et que ses valeurs propres sont exactement les racines n-ièmes de l'unité. De plus, les valeurs propres de C sont exactement les $P\left(\omega^i\right)$ (non nécessairement distinctes). On peut alors prendre pour matrice de passage de la base canonique à la base propre la matrice :

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Cette matrice U est unitaire ($U^*U = I_n$) et les formules de passage précédentes s'écrivent (en notant Λ la matrice diagonale de coefficients les valeurs propres) :

$$C = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^* \text{ et } \Lambda = U^{-1}CU = U^*CU$$

Une nouvelle définition possible pour l'ensemble des matrices circulantes est alors l'ensemble des matrices de la forme UDU^* avec D diagonale (géométriquement, cela correspond aux endomorphismes qui admettent la base orthonormale des X_k comme base de vecteurs propres).

II.2.4 Transformée de Fourier discrète

On constate que la réduction des matrices circulantes fait intervenir les formules de la transformation de Fourier discrète. En analyse numérique, les systèmes circulants peuvent ainsi être résolus très efficacement par transformée de Fourier rapide.
On peut alors retrouver les coefficients de C à partir des valeurs propres en effectuant cette fois une transformée inverse :

$$\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \omega^{-kj},\ \text{où } \lambda_j = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega^{kj}$$

On peut alors résoudre des systèmes circulants en écrivant le système comme produit de convolution discret et en passant à la transformée de Fourier discrète puis son inverse (cette méthode est beaucoup plus rapide que l'élimination du pivot de Gauss et l'est d'autant plus si l'on a recours à la transformée de Fourier rapide).

II.3 Recasages

Recasages : 102 - 144 - 149 - 150 - 152 - 153 - 181 - 191 - 226

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.